ГАОУ ВО «Дагестанский государственный университет народного хозяйства»

Кафедра математики

Предел функции

Учебно – методическое пособие

для студентов очной формы обучения

Махачкала 2018

УДК 51(075)

ББК 22.1я7

Составитель: Абдулаева Халисат Саидовна – старший преподаватель кафедры математики Дагестанского государственного университета народного хозяйства.

Внутренний рецензент: Мухидинов Магомед Гаджиевич кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики Дагестанского государственного университета народного хозяйства.

Внешний рецензент: Ибрагимов Мурад Гаджиевич кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Дифференциальные уравнения и функциональный анализ» Дагестанского государственного университета.

Абдулаева Х.С. **Математика.** Учебное пособие. – Махачкала: ДГУНХ, 2018г., 46с.

Печатается по решению Учебно – методического совета Дагестанского государственного университета народного хозяйства.

Оглавление

Введение

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов вторых курсов (на базе основного общего образования) и первых курсов (на базе среднего общего образования) специальностей СПО.

Оно поможет обучающимся при их самостоятельной работе и выполнении домашних заданий. Для этого в пособии имеется необходимая теория с большим количеством решенных примеров, а также задания для самостоятельной работы студентов.

Тема 1.Основные определения, свойства пределов функций одной переменной

1.1 Основные определения

Понятие предела функции является одним из основных в математическом анализе. Определения производной, интеграла, непрерывности и т.д. основаны на использовании предела.

Число b называют *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \to a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что при всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, обозначают $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ либо $f(x) \to b$ при $x \to a$.

Дадим геометрическую интерпретацию понятия предела функции в точке. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Предположим, что функция имеет при $x \to a$ пределом число b. Возьмем произвольное сколь угодно малое число $\varepsilon > 0$. Окружим число b ε -окрестностью . Найдем на оси Ox такую окрестность точки a: $(a - \delta, a + \delta)$, при попадании в которую значений аргумента x соответствующие значения функции попадут в ε -окрестность число b При уменьшении числа ε интервал $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ будет стягиваться к числу b. Соответствующий ему интервал $(a - \delta, a + \delta)$ будет стягиваться к числу a. Это и доказывает, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Число b называют *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \to \infty$ или $x \to -\infty$ **, если для** любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать положительное число N , такое, что при всех x, удовлетворяющих условию $|x| > N$, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.Бесконечно малая (величина) — числовая функция или последовательность, которая стремится к нулю.

Функция *y=f(x)* называется *бесконечно малой* при *x→a* или при *x→∞*, если $\lim_{x\to a} f(x)=0$ или $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, т.е. бесконечно малая функция – это функция, предел которой в данной точке равен нулю.

Бесконечно большая (величина) — числовая функция или последовательность, которая стремится к бесконечности определённого знака.

Переменная **x** называется бесконечно большой, если для всякого положительного числа существует такое значение x_0, что каждое следующее за ним **x** будет по абсолютной величине больше c. Пишут: $x\to\infty$.

Непрерывная функция — функция без «скачков», то есть такая, у которой малые изменения аргумента приводят к малым изменениям значения функции.

Функция f *непрерывна в точке* $x_0\in D$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для любого

$$x\in D,\ |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Если функция *f* (*x*) не является непрерывной в точке *x* = *a*, то говорят, что *f* (*x*) имеет *разрыв* в этой точке.

1.2 Свойства предела функции

1. Функция $f(x)$ при $x\to a$ имеет единственный предел.

2. Предел постоянной равен самой постоянной: $\lim_{x\to a} C=C\ \ (C=const)$.

3. Постоянную можно выносить за знак предела .

4. Предел суммы или разности конечного числа функций равен сумме или разности пределов этих функций

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x).$$

5. Предел произведения двух функций равен произведению пределов этих функций $\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$.

6. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$ при условии, что $\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$.

7. Если $f(x)\geq 0\ \left(f(x)\leq 0\right)$, то $\lim_{x\to a}f(x)\geq 0\ \left(\lim_{x\to a}f(x)\leq 0\right)$. 8. Пусть функции связаны соотношением $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$, причем $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}h(x)=A$, тогда и $\lim_{x\to a}g(x)=A$.

9. $\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}=\left[\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]\right]^{\lim\limits_{x\to a}\left[g(x)\right]}$.

Следствие. $\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{n}=\left[\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]\right]^{n}$.

10. $\lim_{x\to a}f\left(\varphi(x)\right)=f\left(\lim_{x\to a}\varphi(x)\right)$.

<u>Замечание.</u> Все свойства пределов распространяются и на случай, когда $x\to\infty$.

Тема 2. Понятие неопределенностей

2.1 Понятие неопределенностей

В практике отыскания пределов наиболее часто применяются свойства 2 - 6 об арифметических действиях над пределами. Однако их непосредственное применение бывает невозможно в особых случаях, называемых неопределенностями, которые возникают при нарушении их условий. Виды неопределенностей $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $[\infty-\infty]$, $[0\cdot\infty]$.

Кроме этих неопределенностей, связанных с арифметическими действиями надпределами,существуют неопределенности , $\left[0^0\right]$, $\left[\infty^0\right]$.

Чтобы найти пределы при наличии неопределенности, надо эту неопределенность устранить, открыв тем самым возможность использования того или иного свойства пределов. Это достигается, с одной стороны, применением алгебраических и тригонометрических преобразований (разложение функции на множители или на слагаемые, приведение дробей к общему знаменателю, добавление и вычитание некоторого выражения, умножение и деление на некоторую функцию, вынесение множителя за скобку и т.п.) заменой переменной, использованием эквивалентных бесконечно малых и бесконечно больших, а с другой стороны, использование так называемых *замечательных пределов*.

Итак, что же такое предел?

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$$

2.2 Любой предел состоит из трех частей:

1) Всем известного значка предела $\lim$.

2) Записи под значком предела, в данном случае $x\to 1$. Запись читается «икс стремится к единице». Чаще всего – именно x, хотя вместо «икса» на практике встречаются и другие переменные. В практических заданиях на

месте единицы может находиться совершенно любое число, а также бесконечность (∞).

3) Функции под знаком предела, в данном случае $\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$.

Сама запись $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^2-3x-5}{x+1}$ читается так: «предел функции $\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$ при икс стремящемся к единице».

Разберем следующий важный вопрос – а что значит выражение «икс **стремится** к единице»? И что вообще такое «стремится»?

Понятие предела – это понятие, если так можно сказать, **динамическое**. Построим последовательность: сначала $x = 1{,}1$, затем $x = 1{,}01$, $x = 1{,}001$, …, $x = 1{,}00000001$, ….

То есть выражение «икс стремится к единице» следует понимать так – «икс» последовательно принимает значения, которые бесконечно близко приближаются к единице и практически с ней совпадают**.**

Как решить вышерассмотренный пример? Исходя из вышесказанного, нужно просто подставить единицу в функцию, стоящую под знаком предела:

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2-3x-5}{x+1} = \frac{2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 5}{1+1} = \frac{-6}{2} = -3$$

Готово.

Итак, первое правило: Когда дан любой предел, сначала просто пытаемся подставить число в функцию**.**

Мы рассмотрели простейший предел, но и такие встречаются на практике, причем, не так уж редко!

<u>Пример с бесконечностью:</u>

$$\lim_{x \to \infty} (1-x)$$

Разбираемся, что такое $x \to \infty$? Это тот случай, когда x неограниченно возрастает, то есть: сначала $x = 10$, потом $x = 100$, потом $x = 1000$, затем $x = 10000000$ и так далее до бесконечности.

А что в это время происходит с функцией $1-x$? $1-10=-9$, $1-100=-99$, $1-1000=-999$, …

Итак: если $x\to\infty$, то функция $1-x$ стремится к минус бесконечности:

$\lim\limits_{x\to\infty}(1-x)=-\infty$

Грубо говоря, согласно нашему первому правилу, мы вместо «икса» подставляем в функцию $(1-x)$ бесконечность и получаем ответ.

Еще один пример с бесконечностью:

$\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-2x-3)$

Опять начинаем увеличивать x до бесконечности и смотрим на поведение функции:

$$
\begin{aligned}
&\textit{если}\quad x=10,\ \textit{то}\ \ 10^2-2\cdot10-3=77\\
&\textit{если}\quad x=100,\ \textit{то}\ \ 100^2-2\cdot100-3=9797\\
&\textit{если}\quad x=1000,\ \textit{то}\ \ 1000^2-2\cdot1000-3=997997\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Вывод: при $x\to\infty$ функция x^2-2x-3 неограниченно возрастает:

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-2x-3)=\infty$$

И еще серия примеров:

Пожалуйста, попытайтесь самостоятельно мысленно проанализировать нижеследующее и запомните простейшие виды пределов:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x-99}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3}{x^3}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^4+x-9}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{4^x}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^x=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+7}}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12}{\ln x}=0$

Если где-нибудь есть сомнения, то можете взять в руки калькулятор и немного потренироваться.

В том случае, если $x\to\infty$, попробуйте построить последовательность $x=10$, $x=100$, $x=1000$. Если $x\to0$, то $x=0{,}1$, $x=0{,}01$, $x=0{,}001$.

***Примечание**: строго говоря, такой подход с построением последовательностей из нескольких чисел некорректен, но для понимания простейших примеров вполне подойдет.*

Также обратите внимание на следующую вещь. Даже если дан предел с большим числом вверху, да хоть с миллионом: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1000000}{x}$, то все равно $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1000000}{x} = 0$, так как рано или поздно «икс» начнёт принимать такие гигантские значения, что миллион по сравнению с ними будет самым настоящим микробом.

Что нужно запомнить и понять из вышесказанного?

1) Когда дан любой предел, сначала просто пытаемся подставить число в функцию.

2) Вы должны понимать и сразу решать простейшие пределы, такие как $\lim\limits_{x \to \infty} (x^4 + 8x + 10) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ и т.д.

Более того, у предела есть очень хороший геометрический смысл. Для лучшего понимания темы рекомендую ознакомиться с методическим материалом Графики и свойства элементарных функций. А поэтому переходим к рассмотрению более сложных пределов.

2.3 Пределы с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$ и метод их решения

Сейчас мы рассмотрим группу пределов, когда $x \to \infty$, а функция представляет собой дробь, в числителе и знаменателе которой находятся многочлены

Пример1.

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$

Согласно нашему правилу попытаемся подставить бесконечность в функцию. Что у нас получается вверху? Бесконечность. А что получается внизу? Тоже бесконечность. Таким образом, у нас есть так называемая неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Можно было бы подумать, что $\frac{\infty}{\infty}=\infty$, и ответ готов, но в общем случае это вовсе не так, и нужно применить некоторый прием решения, который мы сейчас и рассмотрим.

Как решать пределы данного типа?

Сначала мы смотрим на числитель и находим x в старшей степени: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$

Старшая степень в числителе равна двум.

Теперь смотрим на знаменатель и тоже находим x в старшей степени: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$ Старшая степень знаменателя равна двум.

Затем мы выбираем самую старшую степень числителя и знаменателя: в данном примере они совпадают и равны двойке.

Итак, метод решения следующий: для того, чтобы раскрыть неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо разделить числитель и знаменатель на x в старшей степени.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\dfrac{1+x+3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x^2}-\dfrac{3x}{x^2}-\dfrac{5}{x^2}}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{x}^{\to 0}-\dfrac{5}{x^2}^{\to 0}}{\dfrac{1}{x^2}^{\to 0}+\dfrac{1}{x}^{\to 0}+3}=\frac{2}{3}$$

Что принципиально важно в оформлении решения

Во-первых, указываем неопределенность, если она есть.

Во-вторых, желательно прервать решение для промежуточных объяснений. Я обычно использую знак $(*)$, он не несет никакого математического смысла, а обозначает, что решение прервано для промежуточного объяснения.

В-третьих, в пределе желательно помечать, что и куда стремится. Когда работа оформляется от руки, удобнее это сделать так: $\dfrac{2-\underbrace{\dfrac{3}{x}}_{\to 0}-\underbrace{\dfrac{5}{x^2}}_{\to 0}}{\underbrace{\dfrac{1}{x^2}}_{\to 0}+\underbrace{\dfrac{1}{x}}_{\to 0}+3}$

Пример 2.

Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}$

Снова в числителе и знаменателе находим x в старшей степени: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}$

Максимальная степень в числителе: 3

Максимальная степень в знаменателе: 4

Выбираем наибольшее значение, в данном случае четверку.

Согласно нашему алгоритму, для раскрытия неопределенности $\dfrac{\infty}{\infty}$ делим числитель и знаменатель на x^4.

Полное оформление задания может выглядеть так:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^4

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{x^4}}{\frac{5x^4+6x^2-3x-4}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{x}^{\to 0}+\frac{15}{x^2}^{\to 0}+\frac{9}{x^3}^{\to 0}+\frac{1}{x^4}^{\to 0}}{5+\frac{6}{x^2}^{\to 0}-\frac{3}{x^3}^{\to 0}-\frac{4}{x^4}^{\to 0}}=$$

$$=\frac{0+0+0+0}{5+0-0-0}=\frac{0}{5}=0$$

Пример 3.

Найти предел $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$

Максимальная степень «икса» в числителе: 2

Максимальная степень «икса» в знаменателе: 1 (x можно записать как x^1)

Для раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо разделить числитель и знаменатель на x^2. Чистовой вариант решения может выглядеть так:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\frac{x+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}^{\to 0}-\frac{5}{x^2}^{\to 0}}{\frac{1}{x}^{\to 0}+\frac{1}{x^2}^{\to 0}}=\frac{2}{0}=\infty$$

Под записью $\frac{2}{0}$ подразумевается не деление на ноль (делить на ноль нельзя), а деление на бесконечно малое число.

Таким образом, при раскрытии неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ у нас может получиться *конечное число*, ноль или бесконечность.

2.4 Пределы с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$ и метод их решения

Предвосхищаю вопрос от чайников: «Почему здесь деление на ноль? На ноль же делить нельзя!». Смысл записи 0:0 будет понятен позже, после ознакомления с четвёртым уроком о бесконечно малых функциях. А пока всем начинающим изучать математический анализ предлагаю читать далее.

Следующая группа пределов чем-то похожа на только что рассмотренные пределы: в числителе и знаменателе находятся многочлены, но «икс» стремится уже не к бесконечности, а к *конечному числу*.

Пример 4.

Решить предел $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$ Сначала попробуем подставить -1 в дробь: $\frac{2(-1)^2-3\cdot(-1)-5}{-1+1}=\frac{0}{0}$ В данном случае получена так называемая неопределенность $\frac{0}{0}$.

Общее правило: если в числителе и знаменателе находятся многочлены, и имеется неопределенности вида $\frac{0}{0}$, то для ее раскрытия нужно разложить числитель и знаменатель на множители.

Для этого чаще всего нужно решить квадратное уравнение и (или) использовать формулы сокращенного умножения. Итак, решаем наш предел

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{0}{0}=(*)$$

Разложим числитель и знаменатель на множители

Для того чтобы разложить числитель на множители, нужно решить квадратное уравнение: $2x^2-3x-5=0$ Сначала находим дискриминант: $D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-5)=9+40=49$

И квадратный корень из него: $\sqrt{D}=\sqrt{49}=7$.

В случае если дискриминант большой, например 361, используем калькулятор, функция извлечения квадратного корня есть на самом простом калькуляторе.

Далее находим корни: $x_1 = \frac{-(-3)-7}{2\cdot 2} = \frac{3-7}{4} = \frac{-4}{4} = -1$ $x_2 = \frac{-(-3)+7}{2\cdot 2} = \frac{3+7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

Такимобразом: $2x^2 - 3x - 5 = 2(x-(-1))\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right) = 2(x+1)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right) = (x+1)\cdot(2x-5)$

Всё. Числитель на множители разложен.

Знаменатель. Знаменатель $x+1$ уже является простейшим множителем, и упростить его никак нельзя.

$(*) = \lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(2x-5)}{x+1} = (*)$

Очевидно, что можно сократить на $(x+1)$:

$(*) = \lim\limits_{x\to -1}(2x-5) = (*)$

Теперь и подставляем -1 в выражение, которое осталось под знаком предела:

$= 2\cdot(-1) - 5 = -2 - 5 = -7$

Естественно, в контрольной работе, на зачете, экзамене так подробно решение никогда не расписывают. В чистовом варианте оформление должно выглядеть примерно так:

$\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1} = \frac{0}{0} = (*)$

Разложим числитель на множители. $2x^2 - 3x - 5 = 0$

$D = (-3)^2 - 4\cdot 2\cdot(-5) = 9 + 40 = 49$ $\sqrt{D} = \sqrt{49} = 7$ $x_1 = \frac{-(-3)-7}{2\cdot 2} = \frac{3-7}{4} = \frac{-4}{4} = -1$

$$x_2 = \frac{-(-3)+7}{2\cdot 2} = \frac{3+7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$2x^2 - 3x - 5 = 2(x+1)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right) = (x+1)\cdot(2x-5)$$

$$(*)=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(2x-5)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(2x-5)=-2-5=-7$$

<u>Пример 5.</u>

Вычислить предел $\lim_{x\to 2}\frac{8-2x^2}{x^2+4x-12}$

Сначала «чистовой» вариант решения

$$\lim_{x\to 2}\frac{8-2x^2}{x^2+4x-12}=\frac{0}{0}=(*)$$

Разложим числитель и знаменатель на множители.

Числитель: $8-2x^2=2(4-x^2)=2(2-x)(2+x)$ Знаменатель: $x^2+4x-12=0$

$D=16+48=64$ $\sqrt{D}=8$ $x_1=\frac{-4-8}{2}=-6$, $x_2=\frac{-4+8}{2}=2$ $x^2+4x-12=(x+6)(x-2)$

$$(*)=\lim_{x\to 2}\frac{2(2-x)(2+x)}{(x+6)(x-2)}=2\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(2+x)}{(x+6)(x-2)}=2\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)(2+x)}{(x+6)(x-2)}=$$
$$=-2\lim_{x\to 2}\frac{(2+x)}{(x+6)}=-2\cdot\frac{4}{8}=-1$$

Что важного в данном примере?Во-первых, Вы должны хорошо понимать, как раскрыт числитель, сначала мы вынесли за скобку 2, а затем использовали формулу разности квадратов. Уж эту-то формулу нужно знать и видеть.

Рекомендация: Если в пределе (практически любого типа) можно вынести число за скобку, то всегда это делаем. Более того, такие числа целесообразно выносить за значок предела. Зачем? Да просто чтобы они не мешались под ногами. Главное, потом эти числа не потерять по ходу решения.

Обратите внимание, что на заключительном этапе решения я вынес за значок предела двойку, а затем – минус.

! Важно В ходе решения фрагмент типа $\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x-2}$ *встречается очень часто. Сокращать такую дробь нельзя. Сначала нужно поменять знак у числителя или у знаменателя (вынести -1 за скобки).*

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{2-x}{x-2} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{-(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2}(-1) = -1$, *то есть появляется знак «минус», который при вычислении предела учитывается и терять его совсем не нужно.*

Вообще, я заметил, что чаще всего в нахождении пределов данного типа приходится решать два квадратных уравнения, то есть и в числителе и в знаменателе находятся квадратные трехчлены.

Тема 3. Метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение

Продолжаем рассматривать неопределенность вида $\frac{0}{0}$

Следующий тип пределов похож на предыдущий тип. Единственное, помимо многочленов, у нас добавятся корни.

<u>Пример 6.</u>

Найти предел $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}$

Начинаем решать.

Сначала пробуем подставить 3 в выражение под знаком предела Еще раз повторяю – это первое, что нужно выполнять для любого предела. Данное действие обычно проводится мысленно или на черновике.

$$\frac{\sqrt{3+6}-\sqrt{10\cdot 3-21}}{5\cdot 3-15}=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{9}}{15-15}=\frac{0}{0}$$

Получена неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которую нужно устранять. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}=\frac{0}{0}=(*)$

Как Вы, наверное, заметили, у нас в числителе находится разность корней. А от корней в математике принято, по возможности, избавляться. Зачем? А без них жизнь проще.

Когда в числителе (знаменателе) находится разность корней (или корень минус какое-нибудь число), то для раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$ используют метод умножения числителя и знаменателя на сопряженное выражение.

Вспоминаем нашу нетленную формулу разности квадратов: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

И смотрим на наш предел: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15}$ Что можно сказать? $(a-b)$ у нас в числителе уже есть. Теперь для применения формулы осталось организовать $(a+b)$ (которое и называется сопряженным выражением).

Умножаем числитель на сопряженное выражение:

$$\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{5x-15}$$

Обратите внимание, что под корнями при этой операции мы ничего не трогаем.

Хорошо, $(a+b)$ мы организовали, но выражение-то под знаком предела изменилось! А для того, чтобы оно не менялось, нужно его разделить на то же самое, т.е. на $(a+b)$:

$$(*)=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=(*)$$

То есть, мы умножили числитель и знаменатель на сопряженное выражение.

В известной степени, это искусственный прием.

Умножили. Теперь самое время применить вверху формулу $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$:

$$(*)=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6})^2-(\sqrt{10x-21})^2}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+6-(10x-21)}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+6-10x+21}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}=(*)$$

Неопределенность $\frac{0}{0}$ не пропала (попробуйте подставить тройку), да и корни тоже не исчезли. Но с суммой корней всё значительно проще, ее можно превратить в постоянное число. Как это сделать? Да просто подставить тройку под корни:

$$(*) = \lim_{x\to 3} \frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{3+6}+\sqrt{10\cdot 3-21})} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(\sqrt{9}+\sqrt{9})} = \lim_{x\to 3} \frac{-9x+27}{(5x-15)\cdot(3+3)} =$$

$$= \frac{1}{6}\lim_{x\to 3} \frac{-9x+27}{5x-15} = (*)$$

Число, как уже отмечалось ранее, лучше вынести за значок предела.

Теперь осталось разложить числитель и знаменатель на множители и сократить «виновников» неопределённости, ну а предел константы – равен самой константе: $(*) = \frac{1}{6}\lim_{x\to 3} \frac{-9(x-3)}{5(x-3)} = \frac{1}{6}\lim_{x\to 3} \frac{-9}{5} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{-9}{5}\right) = -\frac{3}{10}$

Готово.

Как должно выглядеть решение данного примера в чистовом варианте? Примерно так:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21}}{5x-15} = \frac{0}{0} = (*)$$

Умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение.

$$(*) = \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{10x-21})\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})}{5(x-3)\cdot(\sqrt{x+6}+\sqrt{10x-21})} =$$

$$= \frac{1}{5}\lim_{x\to 3} \frac{x+6-(10x-21)}{(x-3)\cdot(\sqrt{x+6}^{\to 3}+\sqrt{10x-21}^{\to 3})} =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}\lim_{x\to 3} \frac{x+6-10x+21}{(x-3)} = \frac{1}{30}\lim_{x\to 3} \frac{-9x+27}{(x-3)} =$$

$$= \frac{1}{30}\lim_{x\to 3} \frac{-9(x-3)}{(x-3)} = \frac{-9}{30} = -\frac{3}{10}$$

<u>Пример 7.</u>

Найти предел $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+x-2}{\sqrt{x+6}-2}$

Сначала попробуйте решить его самостоятельно.

Окончательное решение примера может выглядеть так:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+x-2}{\sqrt{x+6}-2} = \frac{0}{0} = (*)$$

Разложим числитель на множители:

$$x^2+x-2=0$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$\sqrt{D} = 3$

$$x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

$$x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$$

Умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение

$$(*) = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x-1)(\sqrt{x+6}+2)}{(\sqrt{x+6}-2)(\sqrt{x+6}+2)} =$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x-1)(\overset{\to 2}{\sqrt{x+6}}+2)}{x+6-4} = 4 \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(x-1)}{x+2} =$$

$$= 4 \lim_{x \to -2} (x-1) = 4 \cdot (-3) = -12$$

Тема 4. Раскрытие неопределенностей вида:,$\frac{\infty}{\infty}$. $\frac{0}{0}$

Следующие пределы считают неопределенностью:,$\frac{\infty}{\infty}$. $\frac{0}{0}$ Если в примере

встретилась неопределенность, то надо найти пути для ее устранения. Общие правила:

1) Если в числителе и знаменателе находятся многочлены, и имеется неопределенности

Вида $\frac{\infty}{\infty}$ или $\frac{0}{0}$ то для решения нужно разложить числитель и знаменатель

на множители или разделить на максимальную степень числителя

(или знаменателя) и числитель и знаменатель.

2) Если же в числителе или в знаменателе находятся иррациональные выражения и имеется неопределенности вида$\frac{\infty}{\infty}$или $\frac{0}{0}$ то для решения надо избавляться от иррациональности, помножив и числитель, и знаменатель на сопряженное выражение.

3) Если же в числителе или в знаменателе находятся тригонометрические выражения и имеется неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или$\frac{\infty}{\infty}$то для решения используют формулу замечательного предела $\lim_{x\to a}\frac{sinx}{x}=1$

Пример 8.

Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{2x^2-9x+9}$.

Решение. Знаменатель дроби $\frac{x^2+x-12}{2x^2-9x+9}$ обращается в нуль при $x=3$, а потому функция $f(x)=\frac{x^2+x-12}{2x^2-9x+9}$ при $x=3$ не существует. Теорему о пределе дроби применить нельзя, так как предел знаменателя равен нулю. Но определение предела функции содержит существенную оговорку: при отыскании предела функции $f(x)$ при $x \to a$ значение функции $f(a)$ при $x = a$ может не рассматриваться.

Т.к. при $x \to 3$ числитель и знаменатель дроби – бесконечно малые функции $\lim\limits_{x\to 3}(x^2 + x - 12) = 0$ и $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2 - 9x + 9) = 0$, то имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Для решения задачи используем правило 2.1 (см. таблицу). Разделим числитель и знаменатель на $(x-3)$. Мы имеем право это сделать, потому что значение $x = 3$ не рассматривается, и, значит $x - 3 \neq 0$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+4)}{2(x-3)(x-\frac{3}{2})} = \lim_{x\to 3}\frac{x+4}{2(x-\frac{3}{2})} = \lim_{x\to 3}\frac{x+4}{2x-3} = \frac{7}{3}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2 + x - 12}{2x^2 - 9x + 9} = \frac{7}{3}$.

Пример 9.

Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+16} - 4}{x^2 + 2x}$.

Решение. Имеем неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$. По правилу 2.2 умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю и применим формулу $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+16} - 4}{x^2 + 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+16} - 4)(\sqrt{x+16} + 4)}{(x^2 + 2x)(\sqrt{x+16} + 4)} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+16})^2 - 4^2}{(x^2 + 2x)(\sqrt{x+16} + 4)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x + 16 - 16}{(x^2 + 2x)(\sqrt{x+16} + 4)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x(x+2)(\sqrt{x+16} + 4)} = \frac{1}{(0+2)(\sqrt{0+16} + 4)} =$$

$$= \frac{1}{2\cdot(4+4)} = \frac{1}{16}$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+2x}=\dfrac{1}{16}$

Пример 10.

Вычислить предел функции

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$.

Решение.

Выражение под знаком предела является отношением двух бесконечно малых величин, имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Учитывая, что неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$

$1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$, имеем, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{2\sin^2\dfrac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{\sin^2\dfrac{x}{2}}$.

Воспользуемся первым замечательным пределом $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Для этого умножим и числитель, и знаменатель на $\dfrac{x}{4}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot x\cdot\frac{x}{4}}{\sin^2\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{4}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{x}{2}\cdot x\cdot\frac{1}{4}}=4\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2=$$

$=4\cdot 1\cdot 1=4$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}=4$.

Пример 11.

Вычислить предел функции

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}$.

Решение.

Если подставить в выражение $x=1$, то получится неопределённость $\left[\frac{0}{0}\right]$. Поэтому разложим числитель и знаменатель на сомножители

Подставим в полученное выражение $x=1$. Тогда

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2-x+x^2-1\right)^2}{x^3-x+2x^2-2}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x(x-1)+(x-1)(x+1)\right)^2}{x\left(x^2-1\right)+2\left(x^2-1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left((x-1)(x+x+1)\right)^2}{\left(x^2-1\right)(x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(2x+1)^2}{(x-1)(x+1)(x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x+1)^2}{(x+1)(x+2)}.$$

получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(2x^2-x-1\right)^2}{x^3+2x^2-x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x+1)^2}{(x+1)(x+2)}=\frac{(1-1)(2+1)^2}{(1+1)(1+2)}=0.$$

Ответ: $\lim_{x\to 1}\frac{\left(2x^2-x-1\right)^2}{x^3+2x^2-x-2}=0$

Пример 12.

Вычислить предел функции

$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$$

Решение. Умножим числитель и знаменатель на выражение $\sqrt[4]{x}+2$. Получим

$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 16}\frac{\left(\sqrt[4]{x}-2\right)\left(\sqrt[4]{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-4\right)\left(\sqrt[4]{x}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{\left(\sqrt{x}-4\right)\left(\sqrt[4]{x}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 16}\frac{1}{\sqrt[4]{x}+2}=\frac{1}{\sqrt[4]{16}+2}=0{,}25.$$

Ответ:

$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}=0{,}25$$

Пример 13.

Необходимо вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2-3x+5x^2-6x^3}{4+2x^2-3x^3}$

Приступая к решению второго примера, видим неопределенность $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Отсюда находим старшую степень числителя и знаменателя – это x^3, выносим в числителе и знаменателе его за скобки и далее сокращаем на него:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2-3x+5x^2-6x^3}{4+2x^2-3x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x}-6\right)}{x^3\left(\frac{4}{x^3}+\frac{2}{x}-3\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x}-6}{\frac{4}{x^3}+\frac{2}{x}-3} =$$

$$= \frac{0-0+0-6}{0+0-3} = \frac{-6}{-3} = 2$$

Ответ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2-3x+5x^2-6x^3}{4+2x^2-3x^3} = 2$

Пример 14.

$$\lim_{x\to 4}\left[2(x+3)-\frac{x}{x-2}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 4} 2(x+3)-\lim_{x\to 4}\frac{x}{x-2}=$$

$$=2\lim_{x\to 4}(x+3)-\frac{\lim\limits_{x\to 4} x}{\lim\limits_{x\to 4}(x-2)}=$$

$$=2(4+3)-\frac{4}{4-2}=12.$$

Пример 15.

Найти предел:

$$\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{2x^2-3}{x^4+x^2+3}.$$

Решение. Предварительно убедимся, что предел делителя не равен нулю:

$$\lim_{x\to\sqrt{3}}(x^4+x^2+3)=\lim_{x\to\sqrt{3}}x^4+\lim_{x\to\sqrt{3}}x^2+\lim_{x\to\sqrt{3}}3=$$
$$=9+3+3=15.$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{2x^2-3}{x^4+x^2+3}=\frac{\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}(2x^2-3)}{\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}(x^4+x^2+3)}=\frac{2\bullet 3-3}{15}=\frac{1}{5}.$$

Пример 16.

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-3x-5}{1+x}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-3x-5}{1+x}=\lim_{x\to 3}\frac{18-9-5}{4}=1$$

Пример 17.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-0-0}{0+0+3}=\frac{2}{3}$$

Пример 18.

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{1+x}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(2x-5)}{1+x}=\lim_{x\to -1}2x-5=-7$$

Пример 19.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{2\cdot 1^2-3\cdot 1-5}{1+1}=\frac{-6}{2}=-3$$

Пример 20.

$$\lim_{x\to 2}\frac{8-2x^2}{x^2+4x-12}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{8-2x^2}{x^2+4x-12}=\lim_{x\to 2}\frac{-4x}{2x+4}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{-8}{8}=-1$$

Пример 21.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-6x+2}{10x^2+2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{6}{x}+\frac{2}{x^2}}{10+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}.$$

Пример 22.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2\cdot x+1}{x+1}=\frac{1^2+2\cdot 1+1}{1+1}=$$
$$=\frac{4}{2}=2$$

Пример 23.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}=\frac{0}{0}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-2}=\frac{2+2}{2-2}=\frac{4}{0}=\infty$$

Пример 24.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{x(1+\frac{1}{x})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x(1-\frac{1}{x^2})}{(1+\frac{1}{x})}=$$

$$=\frac{\infty(1-\frac{1}{\infty})}{(1+\frac{1}{\infty})}=\frac{\infty\cdot 1}{1+0}=\frac{\infty}{1}=\infty$$

Тема 5. Замечательные и табличные пределы

5.1 Первый замечательный предел:

Замеча́тельные преде́лы— термин, использующийся в советских и российских учебниках по математическому анализу для обозначения двух широко известных математических тождеств со взятием предела:

- Первый замечательный предел:
- Второй замечательный предел:

Следует отметить, что это исторически сложившиеся названия, и, когда, например, говорят о «первом замечательном пределе», то подразумевают под этим вполне определенную вещь, а не какой-то случайный, взятый с потолка предел.

Рассмотрим следующий предел: $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ (вместо родной буквы «хэ» я буду использовать греческую букву «альфа», это удобнее с точки зрения подачи материала).

Согласно нашему правилу нахождения пределов (см. статью Пределы. Примеры решений) пробуем подставить ноль в функцию: в числителе у нас получается ноль (синус нуля равен нулю), в знаменателе, очевидно, тоже ноль. Таким образом, мы сталкиваемся с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$, которую, к счастью, раскрывать не нужно. В курсе математического анализа, доказывается, что:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

Данный математический факт носит название Первого замечательного предела. Аналитическое доказательство предела приводить не буду, а вот его геометрический смысл рассмотрим на уроке о бесконечно малых функциях.

Нередко в практических заданиях функции могут быть расположены по-другому, это ничего не меняет:

$\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1$ – тот же самый первый замечательный предел.

! Но самостоятельно переставлять числитель и знаменатель нельзя! Если дан предел в виде $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\alpha}$, то и решать его нужно в таком же виде, ничего не переставляя.

На практике в качестве параметра α может выступать не только переменная x, но и элементарная функция, сложная функция. Важно лишь, чтобы она стремилась к нулю.

Примеры:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{5x}{3}}{\sin\frac{5x}{3}}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(arctgx)}{arctgx}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-5x^2+x}{\sin(x^3-5x^2+x)}=1$

Здесь $\frac{5x}{3}\to 0$, $arctgx\to 0$, $(x^3-5x^2+x)\to 0$, – первый замечательный предел применим.

Почему? Потому что многочлен x^2-3x+5 не стремится к нулю, он стремится к пятерке.

Кстати, вопрос на засыпку, а чему равен предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x^2-3x+5)}{x^2-3x+5}$? Ответ можно найти в конце урока.

Все-таки математические определения и формулы $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ лучше помнить наизусть.

Переходим к рассмотрению практических примеров:

Пример 1

Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}$

Если мы замечаем в пределе синус, то это нас сразу должно наталкивать на мысль о возможности применения первого замечательного предела.

Сначала пробуем подставить 0 в выражение под знак предела (делаем это мысленно или на черновике):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\frac{0}{0}$$

Итак, у нас есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, ее *обязательно указываем* в оформлении решения. Выражение под знаком предела у нас похоже на первый замечательный предел, но это не совсем он, под синусом находится $7x$, а в знаменателе $3x$.

В подобных случаях первый замечательный предел нам нужно организовать самостоятельно, используя искусственный прием. Ход рассуждений может быть таким: «под синусом у нас $7x$, значит, в знаменателе нам тоже нужно получить $7x$». А делается это очень просто:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3\cdot\frac{1}{7}\cdot 7x}$$

То есть, знаменатель искусственно умножается в данном случае на 7 и делится на ту же семерку. Теперь запись у нас приняла знакомые очертания.Когда задание оформляется от руки, то первый замечательный предел желательно пометить простым карандашом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\overset{(1\text{-й замечательный предел})\ \to 1}{\sin 7x}}{3\cdot\frac{1}{7}\cdot 7x}$$

Что произошло? По сути, обведенное выражение у нас превратилось в единицу и исчезло в произведении:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\overset{(1\text{-й замечательный предел})\ \to 1}{\sin 7x}}{3\cdot\frac{1}{7}\cdot 7x}=\frac{1}{\frac{3}{7}}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\overset{(1\text{-й замечательный предел})\ \to 1}{\sin 7x}}{3\cdot\frac{1}{7}\cdot 7x}=\frac{1}{\frac{3}{7}}=\frac{7}{3}$$

.

Готово. Окончательный ответ: $\frac{7}{3}$

Если не хочется использовать пометки карандашом, то решение можно оформить так:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\frac{0}{0}=(*)$$

Используем первый замечательный предел $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$

$$(*)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3\cdot\frac{1}{7}\cdot 7x}=\frac{1}{\frac{3}{7}}=\frac{7}{3}$$

<u>Пример 2</u>

Найти предел $\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}$

Опять мы видим в пределе дробь и синус. Пробуем подставить в числитель и знаменатель ноль: $\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}$ Действительно, у нас неопределенность $\frac{0}{0}$ и, значит, нужно попытаться организовать первый замечательный предел. На уроке <u>Пределы. Примеры решений</u> мы рассматривали правило, что когда у нас есть неопределенность $\frac{0}{0}$, то нужно разложить числитель и знаменатель на множители. Здесь – то же самое, степени мы представим в виде произведения (множителей):

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}$$

Далее, по уже знакомой схеме организовываем первые замечательные пределы. Под синусами у нас $\frac{x}{2}$, значит, в числителе тоже нужно получить $\frac{x}{2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}$$

Аналогично предыдущему примеру, обводим карандашом замечательные пределы (здесь их два), и указываем, что они стремятся к единице:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}$$

Собственно, ответ готов:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\cdot x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}=5\cdot 2\cdot 2=20$$

Пример 3

Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x^2}$

Подставляем ноль в выражение под знаком предела**:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x^2}=\frac{0}{0}$$

Получена неопределенность $\frac{0}{0}$, которую нужно раскрывать. Если в пределе есть тангенс, то почти всегда его превращают в синус и косинус по известной тригонометрической формуле $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

В данном случае:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2\cdot\cos 2x}$$

Косинус нуля равен единице, и от него легко избавиться (не забываем пометить, что он стремится к единице):

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2\cdot(\cos 2x)^{\to 1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2}$$

Таким образом, если в пределе косинус является множителем, то его, грубо говоря, нужно превратить в единицу, которая исчезает в произведении.

Дальше по накатанной схеме, организуем первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2\cdot(\cos 2x)^{\to 1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x\cdot x}=$$

Здесь все вышло проще, без всяких умножений и делений. Первый замечательный предел тоже превращается в единицу и исчезает в произведении:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2\cdot(\cos 2x)^{\to 1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x^2}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\frac{1}{0}=\infty$$

В итоге получена бесконечность, бывает и такое.

Пример 4

Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}$

Пробуем подставить ноль в числитель и знаменатель:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}=\frac{0}{0}$$

Получена неопределенность $\frac{0}{0}$ (косинус нуля, как мы помним, равен единице)

Используем тригонометрическую формулу $1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$. Возьмите на заметку! Пределы с применением этой формулы почему-то встречаются очень часто.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{5x}$$

Постоянные множители вынесем за значок предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{5x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x}$$

Организуем первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{5x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x}=$$
$$=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\sin 2x}{\frac{1}{2}\cdot 2x}$$

Здесь у нас только один замечательный предел, который превращается в единицу и исчезает в произведении:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{5x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x}=$$
$$=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\sin 2x}{\frac{1}{2}\cdot 2x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}}$$

Избавимся от трех этажности**:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{5x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x}=$$
$$=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\sin 2x}{\frac{1}{2}\cdot 2x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}\cdot 2\lim_{x\to 0}(\sin 2x)$$

Предел фактически решен, указываем, что оставшийся синус стремится к нулю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{5x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x}=$$
$$=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\sin 2x}{\frac{1}{2}\cdot 2x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}\cdot 2\lim_{x\to 0}(\sin 2x)^{\to 0}=\frac{4}{5}\cdot 0=0$$

Пример 5

Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ctgx\cdot(1-\cos^2 3x)}{(x^2+5x)}$

Этот пример сложнее, попробуйте разобраться самостоятельно**:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{ctgx\cdot(1-\cos^2 3x)}{(x^2+5x)}=\frac{\infty\cdot 0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot(1-\cos^2 3x)}{\sin x\cdot(x^2+5x)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^{\to 1}\cdot(1-\cos^2 3x)}{\sin x\cdot(x^2+5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 3x}{\sin x\cdot(x^2+5x)}=\frac{0}{0}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sin x\cdot x\cdot(x+5)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sin x\cdot x\cdot(x^{\to 0}+5)}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sin x\cdot x}=$$
$$=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot\sin 3x}{\sin x\cdot x}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin 3x\cdot\sin 3x}{\sin x\cdot 3x\cdot 3x\cdot\frac{1}{9}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\frac{1}{9}}=\frac{9}{5}$$

Некоторые пределы можно свести к 1-му замечательному пределу путём замены переменной

5.2 Второй замечательный предел

В теории математического анализа доказано, что:

$$\lim_{\alpha \to \infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} = e$$

Данный факт носит название второго замечательного предела.

Справка: $e = 2{,}718281828...$ *– это иррациональное число.*

В качестве параметра α может выступать не только переменная x, но и сложная функция. Важно лишь, чтобы она стремилась к бесконечности.

<u>Пример 6</u>

Найти предел $\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}$

Когда выражение под знаком предела находится в степени – это первый признак того, что нужно попытаться применить второй замечательный предел.

Но сначала, как всегда, пробуем подставить бесконечно большое число в выражение $\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}$, по какому принципу это делается, разобрано на уроке <u>Пределы. Примеры решений</u>**.**

Нетрудно заметить, что при $x \to \infty$ основание степени $\left(1+\frac{1}{3x}\right) \to 1$, а показатель – $4x \to \infty$, то есть имеется, неопределенность вида 1^{∞}:

$$\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x} = 1^{\infty}$$

Данная неопределенность как раз и раскрывается с помощью второго замечательного предела. Но, как часто бывает, второй замечательный предел не лежит на блюдечке с голубой каемочкой, и его нужно искусственно организовать. Рассуждать можно следующим образом: в данном примере параметр $\alpha = 3x$, значит, в показателе нам тоже нужно организовать $3x$. Для этого возводим основание в степень $3x$, и, чтобы выражение не изменилось – возводим в степень $\frac{1}{3x}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x}$$

Когда задание оформляется от руки, карандашом помечаем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}}_{e\text{ (2-ой замечательный предел)}}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x}$$

Практически всё готово, страшная степень превратилась в симпатичную букву e:

При этом сам значок предела перемещаем в показатель**:**

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}}_{e\text{ (2-ой замечательный предел)}}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{3x}}=e^{\frac{4}{3}}$$

Далее, отметки карандашом я не делаю, принцип оформления, думаю, понятен.

Пример 7 . Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}$

Внимание! Предел подобного типа встречается очень часто, пожалуйста, очень внимательно изучите данный пример.

Пробуем подставить бесконечно большое число в выражение, стоящее под знаком предела:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$$

В результате получена неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$. Но второй замечательный предел применим к неопределенности вида 1^{∞}. Что делать? Нужно преобразовать основание степени. Рассуждаем так: в знаменателе у нас $x+1$, значит, в числителе тоже нужно организовать $x+1$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}$$

Теперь можно почленно разделить числитель на знаменатель:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{2x+3}$$

Вроде бы основание стало напоминать $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$, но у нас знак «минус» да и тройка какая-то вместо единицы. Поможет следующее ухищрение, <u>делаем дробь трех этажной</u>:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{2x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{2x+3}=1^{\infty}$$

Таким образом, основание приняло вид $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$, и, более того, появилась нужная нам неопределенность 1^{∞}. Организуем второй замечательный предел $\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}$.

Легко заметить, что в данном примере $\alpha=\frac{x+1}{-3}$. Снова исполняем наш искусственный прием: возводим основание степени в $\frac{x+1}{-3}$, и, чтобы выражение не изменилось – возводим в обратную дробь $\frac{-3}{x+1}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{2x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{2x+3}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{\frac{x+1}{-3}}\right)^{\frac{-3}{x+1}\cdot(2x+3)}$$

Наконец-то долгожданное $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}$ устроено, с чистой совестью превращаем его в букву e:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{2x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{2x+3}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{\frac{x+1}{-3}}\right)^{\frac{-3}{x+1}(2x+3)}=e^{-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x+1}}=e^{\frac{\infty}{\infty}}$$

Но на этом мучения не закончены, в показателе у нас появилась неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, раскрывать такую неопределенность мы научились на уроке Пределы. Примеры решений. Делим числитель и знаменатель на x:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{2x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{2x+3}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{\frac{x+1}{-3}}\right)^{\frac{-3}{x+1}\cdot(2x+3)}=e^{-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x+1}}=e^{\frac{\infty}{\infty}}=$$

$$=e^{-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2x+3}{x}}{\frac{x+1}{x}}}=e^{-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}\to 0}{1+\frac{1}{x}\to 0}}=e^{-3\cdot 2}=e^{-6}$$

Готово.

А сейчас мы рассмотрим модификацию второго замечательного предела. Напомню, что второй замечательный предел выглядит следующим образом: $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}=e$. Однако на практике время от времени можно встретить его «перевёртыш», который в общем виде записывается так:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$$

Пример 8

Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+tgx)^{\frac{1}{2x}}$

Сначала (мысленно или на черновике) пробуем подставить ноль (бесконечно малое число) в выражение, стоящее под знаком предела:

$$(1+tg0)^{\frac{1}{2\cdot 0}}=(1+0)^{\frac{1}{0}}=1^{\infty}$$

В результате получена знакомая неопределенность 1^{∞}. Очевидно, что в данном примере $\alpha = tgx$. С помощью знакомого искусственного приема организуем в показателе степени конструкцию $\frac{1}{\alpha}$:

$$\lim_{x\to 0}(1+tgx)^{\frac{1}{2x}}=1^{\infty}=\lim_{x\to 0}\left((1+tgx)^{\frac{1}{tgx}}\right)^{tgx\cdot\frac{1}{2x}}$$

Выражение $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ со спокойной душой превращаем в букву e:

$$\lim_{x\to 0}(1+tgx)^{\frac{1}{2x}}=1^{\infty}=\lim_{x\to 0}\left((1+tgx)^{\frac{1}{tgx}}\right)^{tgx\cdot\frac{1}{2x}}=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}}=e^{\frac{0}{0}}$$

Еще не всё, в показателе у нас появилась неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Раскладываем тангенс на синус и косинус (ничего не напоминает?):

$$\lim_{x\to 0}(1+tgx)^{\frac{1}{2x}}=1^{\infty}=\lim_{x\to 0}\left((1+tgx)^{\frac{1}{tgx}}\right)^{tgx\cdot\frac{1}{2x}}=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}}=e^{\frac{0}{0}}=$$

$$=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cdot\cos x}}$$

Косинус нуля стремится к единице (не забываем помечать карандашом), поэтому он просто пропадает в произведении:

$$\lim_{x\to 0}(1+tgx)^{\frac{1}{2x}}=1^{\infty}=\lim_{x\to 0}\left((1+tgx)^{\frac{1}{tgx}}\right)^{tgx\cdot\frac{1}{2x}}=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}}=e^{\frac{0}{0}}=$$

$$=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cdot(\cos x)^{\to 1}}}=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=e^{\frac{1}{2}}$$

Контрольные варианты

Вариант 1

1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+1}{x^3+5}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x^2+x}{x^4-x^2-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{(x+4)(x+2)}{x^2+9x+20}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$; 6) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{x^2+16}$

7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x+2}{x^2+x-3}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-3x-5}{2x-x^5}$; 9) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-16}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{5x}$; 11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)^{x-1}$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{5x}$.

13) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+6x+6}$; 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15x^4+x^2+2}{1-5x^3-x^4}$; 15) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$;

16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{x}$; 17) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$; 18) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+9}{x-3}$;

Вариант 2

1) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5x^2+2x-1}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+5x-3}{1-x}$; 3) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{x^2-9}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 10x}{\sin 11x}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x+1}\right)^x$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{16x}{\sin 4x}\right)^{x+2}$.

7) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^3+2)$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-5x+3}{2x-3x^2+1}$; 9) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3+27}{x^2-9}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{\sin 2x}$; 11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x+5}$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+4}\right)^{7x}$.

13) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{3x+5}{x-5}$; 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2}{4x^5+x+1}$; 15) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-49}{x-7}$;

16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{4x^2}$; 17) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{2x-3}\right)^{3x}$; 18) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$.

Вариант 3.

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x+2}{x^2+x-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-3x-5}{2x-x^5}$; 3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-16}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{5x}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)^{x-1}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{5x}$.

7) $\lim\limits_{x\to 7}(7x-x^2)$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-x^2+2}{5x^3-x^4}$; 9) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-16}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$; 11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^x$; 12) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x+4}{x^2-16}$

13) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x^2-4x+2}{3x^2+x-3}$; 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^5-5x+3}{2x-x^5}$; 15) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$;

16) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 5x}$; 17) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{x-1}$; 18) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x+2}{6x+3}\right)^{3x}$.

Вариант 4.

1) $\lim\limits_{x\to -3}(7x-x^2+9)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^7-x^2+2}{5x^7-9x^4+11}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x+2}{(x-1)(x+3)}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{6x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{3x-1}\right)^x$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5}{3x+4}\right)^{4x}$.

7) $\lim\limits_{x\to 7}(7x-x^2)$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^7+x^5-2}{x^3-2x^7+5}$; 9) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{(x-1)^2}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 6x}$; 11 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{1-x}\right)^{x+2}$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-4}\right)^{3x}$.

13) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{5x^2+2x-1}{x}$; 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-x^3-15}{x^2-16}-16$; 15) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$;

16) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{10x}{\sin 5x}$; 17) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-9}\right)^{9x}$; 18) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{\sin 4x}\right)^{\frac{x^2-2}{4}}$.

Список литературы:

1. Н.В.Богомолов Практические занятия по математике. – М., 1983.
2. Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. – М., 1986.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М., 1980.
4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М., 1989.
5. Колягин Ю.М., Луканкин Г.Л., Яковлев Г.Н. Математика (2 книги) – М., 2004.
6. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа: Учебник для вузов. – М., 1989.
7. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. – М., 2003.
8. Марков Л.Н., Размыслович Г.П. Высшая математика: Учебник для вузов. – М., 1999.
9. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Для вузов. Т.I, 2. – М., 1985.
10. Подольский В.А., Суходский А.М., Мироненко Е.С. Сборник задач по математике. – М., 1999.
11. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т.I, 2. – М., 1968.