ГАОУ ВО «Дагестанский государственный университет народного хозяйства»

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

Миспахов Арсен Шарафидинович

Учебное пособие

Математика

Раздел: «*Иррациональные уравнения и неравенства*»

(для студентов 1 курса всех специальностей Бизнес-колледжа)

Махачкала 2018

УДК 51
ББК 22.143
Миспахов А.Ш. Учебное пособие по математике. Раздел: «Иррациональные уравнения и неравенства» – Махачкала: ДГУНХ, 2018г., 23 с.

Пособие содержит задачи и упражнения по всем основным темам раздела «Иррациональные уравнения и неравенства». По всем темам приведен в краткой форме теоретический материал. Подробные решения примеров помогут студентам при подготовке к практическим, лабораторным занятиям, а также для выполнения самостоятельных работ.

Учебное пособие по математике. Раздел: «Иррациональные уравнения и неравенства» размещен на сайте www.dgunh.ru.

Печатается по решению Учебно – методического совета Дагестанского государственного университета народного хозяйства.

Оглавление

Иррациональным будем называть уравнение, в котором неизвестное содержится под знаком радикала или под знаком возведения в дробную степень. Рассмотрим некоторые способы решения иррациональных уравнений.

§1. Решение иррациональных уравнений по определению арифметического корня натуральной степени:

$$\sqrt[n]{a} = b \iff \begin{cases} a \ge 0, \\ b \ge 0, \\ a = b^n. \end{cases}$$

Например:

1) Решите уравнение: $\sqrt{5-x} = 6$.

Решение: $5 - x = 6^2$; ОДЗ: $5 - x \ge 0$;

$x = 5 - 36$; $x \le 5$.

$x = -31$.

Ответ: $x = -31$.

2) Решите уравнение: $\sqrt[5]{2x-1} = -2$.

Решение: $2x - 1 = -32$;

$2x = -31$;

$x = -15{,}5$.

Ответ: $x = -15{,}5$.

3) Решите уравнение: $\sqrt{5-x} = -6$.

Решение: т.к. арифметическим корнем четной степени является неотрицательное число, то данное уравнение не имеет решений.

4) Решите уравнение: $\sqrt{2x^2 - x} = 2 - x$.

Решение: $2x^2 - x = 4 - 4x + x^2$;

$$2x^2 - x - 4 + 4x - x^2 = 0;$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0;$$

по теореме, обратной теореме Виета:

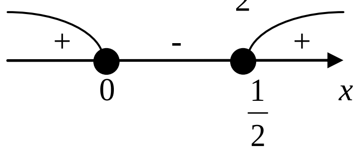
$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1 \cdot x_2 = -4 \end{array}\right| \begin{array}{l} x_1 = -4 \\ x_2 = 1. \end{array}$$

ОДЗ: $2x^2 - x \geq 0$;

$$x(2x - 1) = 0;$$

$x = 0$ либо $2x - 1 = 0$;

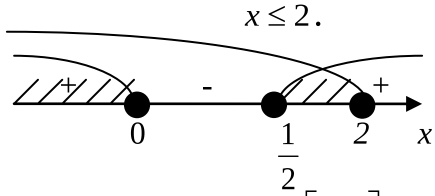
$$x = \frac{1}{2};$$



$$(-\infty; 0]; \ \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

Доп. условие: $2 - x \geq 0$;

$$x \leq 2.$$



$$(-\infty; 0]; \ \left[\frac{1}{2}; 2\right]$$

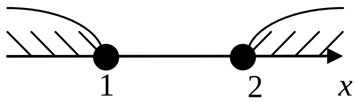
Ответ: $x_1 = -4$, $x_2 = 1$.

5) Решите уравнение: $\sqrt{x} + \sqrt{x - 2} = 1 - x$.

Решение: ОДЗ: $\begin{cases} x \geq 0, \\ x - 2 \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0, \\ x \geq 2; \end{cases}$ $x \geq 2$.

Доп. условие: $1 - x \geq 0$;

$$x \leq 1.$$



решений нет

Ответ: нет решений.

<u>Решение уравнений</u>:

1) Задания для классной работы (№151(1,3,5,7); №152(1); №153(1); №154(1, 4); №155(1,3), №183(1,3,5)) [1, с.60,68]:

1. $\sqrt{x} = 2$;

2. $\sqrt[3]{x} = 2$;

3. $\sqrt[3]{1 - 3x} = 0$;

4. $\sqrt[4]{2 - x} = 0$;

5. $\sqrt{x+1}=3$;

6. $\sqrt[3]{2x+3}=1$;

7. $\sqrt{3-x}=2$;

8. $\sqrt[3]{x^2-17}=2$;

9. $\sqrt{x^2-x-3}=3$;

10. $\sqrt{3-4x}=2x$;

11. $x+1=\sqrt{1-x}$;

12. $\sqrt{x}-x=-12$;

13. $\sqrt{x-1}=x-3$;

14. $\sqrt{1-2x}=x-5$;

15. $\sqrt{x+3}=-x-4$

16. $\sqrt{x-13}-\sqrt{10-x}=2$;

17. $\sqrt{3-x}=x-3$;

18. $\sqrt{x}+\sqrt{x-2}=1-x$.

2) Задания для домашнее работы (№151(2,4,6); №152(2); №153(2); №154(2,); №155(2,4); №183(2,4,6)) [1, с.60,68]:

1. $\sqrt{x}=7$;

2. $\sqrt[3]{x}=-3$;

3. $\sqrt[4]{x}=1$;

4. $\sqrt{x-2}=5$;

5. $\sqrt[3]{1-x}=2$;

6. $x=1+\sqrt{x+11}$;

7. $1-x=\sqrt{6+x-x^2}$;

8. $x+\sqrt{x}=2(x-1)$;

9. $\sqrt{6-4x}+\sqrt{x-6}=3$;

10. $\sqrt{x-7}+\sqrt{5+x}=-1$.

3) Задания для самостоятельной работы:

Вариант I

Решите уравнение:

1. $\sqrt{x}=-5$;

2. $\sqrt[3]{8x-1}=2$;

3. $\sqrt{x+8}=x-4$;

4. $\sqrt{2x}+\sqrt{6-x}=\sqrt{-1-x}$.

Вариант II

Решите уравнение:

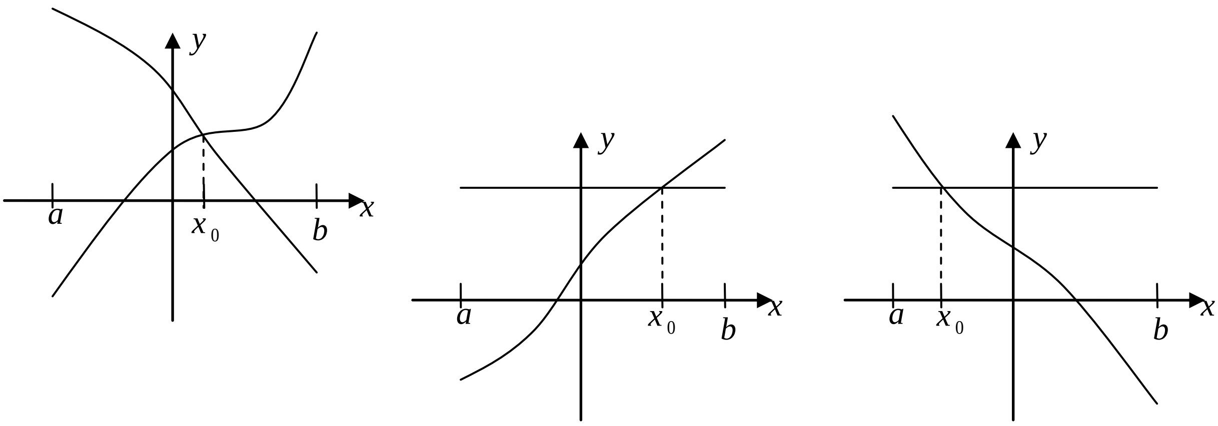
1. $\sqrt[3]{x}=-5$;

2. $\sqrt{3-7x}=-4$;

3. $2x+\sqrt{5x+6}=x$;

4. $\sqrt{-4+x}-\sqrt{5x-1}=\sqrt{3-x}$.

§2. Использование свойств монотонности функций при решении иррациональных уравнений:

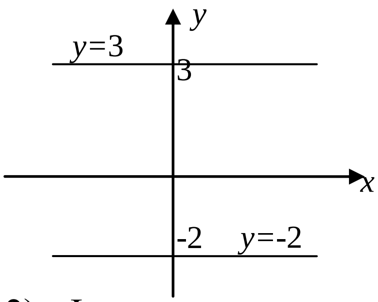


Утверждение: *Если на промежутке $\langle a;b\rangle$ две функции имеют различные монотонности, то графики этих функций на данном промежутке имеют не более одной общей точки.*

Т.о. уравнение $f(x)=g(x)$, где $y=f(x)$ и $y=g(x)$ – функции разной монотонности, имеет не более одного корня.

Замечания:

1) Функция $y=a$, где a – действительное число, является *постоянной*.



2) Функция $y(x)=kx+b$, где $k>0$, является *возрастающей* для любого действительного значения аргумента.

Функция $y(x)=kx+b$, где $k<0$, является *убывающей* для любого действительного значения аргумента.

3) Функция $y(x)=\sqrt[n]{x}$ является *возрастающей* для любого действительного значения аргумента из области определения.

4) Функция $y(x)=a\sqrt[n]{x}$, где $a>0$, является *возрастающей* для любого действительного значения аргумента из области определения.

Функция $y(x)=a\sqrt[n]{x}$, где $a<0$, является *убывающей* для любого действительного значения аргумента из области определения.

5) Функция $y(x)=\sqrt[n]{kx+b}$, где $k>0$, является *возрастающей* для любого действительного значения аргумента из области определения.

Функция $y(x)=\sqrt[n]{kx+b}$, где $k<0$, является *убывающей* для любого действительного значения аргумента из области определения.

6) Функция $y(x)=a\sqrt[n]{kx+b}$, где $ak>0$, является *возрастающей* для любого действительного значения аргумента из области определения.

Функция $y(x)=a\sqrt[n]{kx+b}$, где $ak<0$, является *убывающей* для любого действительного значения аргумента из области определения.

Например:

1) Решите уравнение: $x+1=\sqrt{1-x}$.

Решение: $y(x)=x+1$ – возрастающая функция $y(x)=\sqrt{1-x}$ – убывающая функция	значит, уравнение имеет не более одного корня x=0

Ответ: x=0.

2) Решите уравнение: $\sqrt{15+x}+\sqrt{3+x}=6$.

Решение: $y(x)=\sqrt{15+x}$ – возрастающая функция

$y(x)=\sqrt{3+x}$ – возрастающая функция

$y(x)=\sqrt{15+x}+\sqrt{3+x}$ – возрастающая функция $y=6$ – постоянная функция	значит, уравнение имеет не более одного корня x=1

Ответ: x=1.

Решение уравнений:

1) Задания для классной работы (№154(1,3); №156(3); 158(1,3); №1157(2)) [1, с.60,61,322]:

1. $\sqrt[3]{x-3}=5$;
2. $x-2=-\sqrt{2x-5}$;
3. $\sqrt{x+3}=\sqrt{5-x}$;
4. $\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}=2$;
5. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6}=0$;
6. $\sqrt{6x+7}=8-x$;
7. $\sqrt{2x-1}+\sqrt{5x-6}=1-x$;
8. $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}=3-x$;
9. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x+4}+\sqrt{7x+9}=\sqrt{36-5x}$;
10. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[4]{x+74}=12-x$.

2) Задания для домашней работы (№158(2,4); №159(1)) [1, с.61]:

1. $\sqrt{12+x}-\sqrt{1-x}=1$;
2. $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}=9$;
3. $\sqrt{2-x}-\sqrt{x-1}=1$;
4. $\sqrt{x-1}+\sqrt{12x+1}=6$;
5. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6}=4$;
6. $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6$;
7. $\sqrt{2t+3}+\sqrt{3t+7}=2-t$;
8. $\sqrt{11-t}-\sqrt{2+t}=\sqrt{3-t}$;
9. $\sqrt{1-2x}-\sqrt{13+x}=\sqrt{x+4}$;
10. $\sqrt{t}+\sqrt{t+5}=\sqrt{33-2t}$.

§3. Решение иррациональных уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$:

Вид уравнения	**Решение**
$\sqrt[2k]{f(x)} = \sqrt[2k]{g(x)}$, где k – натуральное число	$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \ge 0 \end{cases}$ **<u>или</u>** $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$
$\sqrt[2k+1]{f(x)} = \sqrt[2k+1]{g(x)}$, где k – натуральное число	$f(x) = g(x)$

<u>Например</u>:

1) Решите уравнение: $\sqrt[4]{x^2 + 3x} = \sqrt[4]{21 - x}$.

Решение: $\begin{cases} x^2 + 3x = 21 - x, \\ 21 - x \ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + 4x - 21 = 0, \\ x \le 21; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = -7, \\ x_2 = 3, \end{array}\right. \\ x \le 21; \end{cases}$ $x_1 = -7, x_2 = 3.$

$x^2 + 4x - 21 = 0$;

по теореме, обратной теореме Виета:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1 \cdot x_2 = -21 \end{array}\right| \begin{array}{l} x_1 = -7 \\ x_2 = 3. \end{array}$$

Ответ: $x_1 = -7, x_2 = 3.$

2) Решите уравнение: $\sqrt[3]{7 - 3x} = \sqrt[3]{-3 - x}$.

Решение: $7 - 3x = -3 - x$;

$-2x = -10$;

$x = 5$.

Ответ: x=5.

3) Решите уравнение: $\sqrt{x - 1} = \sqrt{-3 - x}$.

Решение: $\begin{cases} x-1=-3-x, \\ x-1\ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x=-2, \\ x\ge 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1, \\ x\ge 1; \end{cases}$ данная система решений не имеет.

Ответ: нет решений.

Решение уравнений:

1) Задания для классной работы:

1. $\sqrt{x+4}=\sqrt{2x-1}$;

2. $\sqrt{5-x}=\sqrt{-9-3x}$;

3. $\sqrt[6]{x+3}=\sqrt[6]{5+4x}$;

4. $\sqrt[11]{x^2-16}=\sqrt[11]{2x^2-8x}$;

5. $\sqrt{x^2-5x+4}=\sqrt{2x^2+10}$.

2) Задания для домашней работы:

1. $\sqrt{-15-x}=\sqrt{x+10}$;

2. $\sqrt[3]{5x-1}=\sqrt[3]{10-x}$;

3. $\sqrt[8]{2x^2-36}=\sqrt[8]{x^2-3x+4}$.

§ 4. Решение иррациональных уравнений вида $\sqrt[n]{f(x)}\cdot g(x)=0$:

1. Уравнение $\sqrt[2k]{f(x)}\cdot g(x)=0$, где k – нат. число, равносильно $\begin{cases} f(x)\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x)=0. \end{array}\right. \end{cases}$

2. Уравнение $\sqrt[2k+1]{f(x)}\cdot g(x)=0$, где k – нат. число, равносильно $\left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x)=0. \end{array}\right.$

Например:

Решите уравнение: $(x^2-4)\cdot\sqrt{x-1}=0$.

Решение: $x^2-4=0$ либо $x-1=0$; ОДЗ: $x-1\ge 0$;

$(x-2)(x+2)=0$ $x=1$; $x\ge 1$.

$x=2$ либо $x=-2$

не удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: $x=1$, $x=2$.

Решение уравнений:

1) Задания для классной работы:

1. $(9-x^2)\sqrt{2+x}=0$;

2. $\left(x^2+x-12\right)\sqrt{x^2-16}=0$.

2) Задания для домашней работы:

1. $\left(16-x^2\right)\sqrt{3+x}=0$;

2. $\left(x^2-2x-5\right)\sqrt{1-x}=0$.

§ 5. Возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень:

Вид уравнения	**Условия**	**Решение**
1. $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=a$	$f(x)\ge 0$, $g(x)\ge 0$, Д.У.: $a\ge 0$	$\sqrt{f(x)}=a-\sqrt{g(x)}$; $f(x)=\left(a-\sqrt{g(x)}\right)^2$
2. $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}=a$	$f(x)\ge 0$, $g(x)\ge 0$	$\sqrt{f(x)}=a+\sqrt{g(x)}$; $f(x)=\left(a+\sqrt{g(x)}\right)^2$
3. $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=h(x)$	$f(x)\ge 0$, $g(x)\ge 0$, Д.У.: $h(x)\ge 0$	$\sqrt{f(x)}=h(x)-\sqrt{g(x)}$; $f(x)=\left(h(x)-\sqrt{g(x)}\right)^2$
4. $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}=h(x)$	$f(x)\ge 0$, $g(x)\ge 0$	$\sqrt{f(x)}=h(x)+\sqrt{g(x)}$; $f(x)=\left(h(x)+\sqrt{g(x)}\right)^2$
5. $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}$	$f(x)\ge 0$, $g(x)\ge 0$, $h(x)\ge 0$	$\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\right)^2=h(x)$
6. $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}$	$f(x)\ge 0$, $g(x)\ge 0$, $h(x)\ge 0$	$f(x)=\left(\sqrt{h(x)}+\sqrt{g(x)}\right)^2$
7. $\sqrt[2n]{f(x)}\cdot\sqrt[2n]{g(x)}=a$	$f(x)\ge 0$, $g(x)\ge 0$, Д.У.: $a\ge 0$	$f(x)\cdot g(x)=a^{2n}$
8. $\sqrt[2n+1]{f(x)}\cdot\sqrt[2n+1]{g(x)}=a$		$f(x)\cdot g(x)=a^{2n+1}$
9. $\dfrac{\sqrt[2n]{f(x)}}{\sqrt[2n]{g(x)}}=a$	$f(x)\ge 0$, $g(x)>0$, Д.У.: $a\ge 0$	$\dfrac{f(x)}{g(x)}=a^{2n}$
10. $\dfrac{\sqrt[2n+1]{f(x)}}{\sqrt[2n+1]{g(x)}}=a$	$g(x)\ne 0$	$\dfrac{f(x)}{g(x)}=a^{2n+1}$

При решении иррациональных уравнений, приведенных выше в таблице, необходимо выполнить проверку полученных в результате решения значений неизвестного.

Например:

1) Решите уравнение: $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-5}$.

Решение: возведём обе части уравнения в квадрат

$x+6-2\sqrt{x+6}\sqrt{x+1}+x+1=2x-5$;

$-2\sqrt{(x+6)\cdot(x+1)}=2x-5-x-x-1-6$;

$-2\sqrt{x^2+7x+6}=-12$;

$\sqrt{x^2+7x+6}=6$; возведём обе части полученного уравнения в квадрат

$x^2+7x+6=36$;

$x^2+7x-30=0$;

по теореме, обратной теореме Виета:

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2=-7 \\ x_1\cdot x_2=-30 \end{array}\right| \begin{array}{l} x_1=-10 \\ x_2=3. \end{array}$$

Проверка показывает, что $x=-10$ не является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x=3$.

2) Решите уравнение: $\sqrt{4-x}\cdot\sqrt{x+1}=\sqrt{6}$.

Решение: возведём обе части уравнения в квадрат

$(4-x)\cdot(x+1)=6$;

$4x+4-x^2-x=6$;

$x^2-3x+2=0$;

по теореме, обратной теореме Виета:

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2=3 \\ x_1\cdot x_2=2 \end{array}\right| \begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=2. \end{array}$$

Проверка показывает, что оба значения неизвестного являются корнями данного уравнения.

Ответ: $x_1=1, x_2=2$.

Решение уравнений:

1) Задания для классной работы (№156(1,2); №159(2); №187(1,3)) [1, с.60,69]:

1. $\sqrt{3-x}-\sqrt{15-x}=-2$;
2. $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$;
3. $\sqrt{2x-34}=1+\sqrt{x}$;
4. $\sqrt{5x}+\sqrt{14-x}=8$;
5. $\sqrt{10+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13}$;
6. $\sqrt{7x+1}-\sqrt{6-x}=\sqrt{15+2x}$;

7. $\sqrt{x-4}=\sqrt{x-3}-\sqrt{2x-1}$; 8. $\sqrt{x-3}=\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+4}$.

2) Задания для домашней работы (№156(4); №187(2,4)) [1, с.60,69]:

1. $\sqrt{3-2x}-\sqrt{1-x}=1$;
4. $2\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+7}=\sqrt{x}$;
2. $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x}=1$;
5. $\sqrt{9-2x}=2\sqrt{4-x}-\sqrt{1-x}$;
3. $\sqrt{5x-3}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x-2}$;
6. $\sqrt{2-x}\cdot\sqrt{x-5}=\sqrt{2}$.

§ 6. Введение вспомогательной переменной с целью понижения степени иррационального уравнения:

Решите уравнение: $\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2-3x+5}=\sqrt{33-2x^2+6x}$.

Решение:

Выполним замену: $x^2-3x=t$;

$\sqrt{t}+\sqrt{t+5}=\sqrt{33-2t}$;

$y(t)=\sqrt{t}$ – возрастающая функция ;

$y(t)=\sqrt{t+5}$ – возрастающая функция;

$y(t)=\sqrt{t}+\sqrt{t+5}$ – возрастающая функция | значит, уравнение имеет не более

$y(t)=\sqrt{33-2t}$ – убывающая функция | одного корня t=4

Обратная замена: $x^2-3x=4$;

$x^2-3x-4=0$;

по теореме, обратной теореме Виета:

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2&=3\\ x_1\cdot x_2&=-4\end{aligned}\right|\quad \begin{aligned} x_1&=-1\\ x_2&=4.\end{aligned}$$

Проверка показывает, что оба значения неизвестного являются корнями данного уравнения.

Ответ: $x_1=-1, x_2=4.$

Решение уравнений:

1) Задания для классной работы:

1. $\sqrt{2-x-x^2}-\sqrt{x^2+x-1}=1$;

2. $\sqrt{2x^2-4x+3}+\sqrt{3x^2-6x+7}=2+2x-x^2$.

2) Задания для домашней работы:

1. $\sqrt{3x+x^2}+\sqrt{x^2+3x+4}=2-x^2-3x$;

2. $x^2-2\sqrt{x^2-2x+2}=2x+1$.

§ 7. Введение вспомогательной переменной с целью исключения иррациональности:

Решите уравнение: $\sqrt{x+4}-3\sqrt[4]{x+4}+2=0$.

Решение:

Выполним замену: $\sqrt[4]{x+4}=t$;

$t^2-3t+2=0$;

по теореме, обратной теореме Виета:

$$\left.\begin{array}{l} t_1+t_2=3 \\ t_1\cdot t_2=2 \end{array}\right| \begin{array}{l} t_1=1 \\ t_2=2; \end{array}$$

Обратная замена:

1) $\sqrt[4]{x+4}=1$; 2) $\sqrt[4]{x+4}=2$;

$x+4=1$; $x+4=16$;

$x=-3$. $x=12$.

Проверка показывает, что оба значения неизвестного являются корнями данного уравнения.

Ответ: $x=-3, x=12.$

Решение уравнений:

1) Задания для классной работы (№188(1,3,5)) [1, с.69]:

1. $\sqrt[6]{1-x}-5\sqrt[3]{1-x}=-6$;

2. $\sqrt[8]{x+1}-\sqrt[4]{x+1}+2=0$;

3. $\dfrac{\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}}{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}=2$.

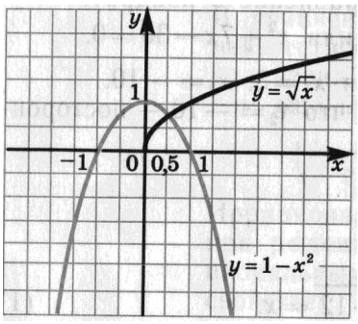
2) Задания для домашней работы (№188(2,4)) [1, с.69]:

1. $\sqrt{x-3}=3\sqrt[4]{x-3}+4$;

2. $x^2+3x+\sqrt{x^2+3x}=2$.

§ 8. Графический способ решения иррациональных уравнений:

Решите уравнение: $\sqrt{x}=1-x^2$.



Решение: Построим в одной прямоугольной системе координат графики функций $y(x)=\sqrt{x}$ и $y(x)=1-x^2$. Графики пересекаются в одной точке при $x\approx 0{,}5$.

Ответ: $x\approx 0{,}5$.

<u>Решите графически уравнения</u>:

1) Задания для классной работы (№162(1,3)) [1, с.61]:

1. $\sqrt{x}-6=-x^2$;

3. $5+4x-x^2=\sqrt[4]{x-5}$;

2. $\sqrt{x+1}=x^2-7$;

4. $\sqrt{4-x}=x^4+3$.

2) Задания для домашней работы (№162(2,4)): 1. $\sqrt[3]{x}=(x-1)^2$; 2. $x^3-1=\sqrt{x-1}$.

Дидактические материалы и методические разработки

I. Недельное домашнее задание: «Решение иррациональных уравнений»

Решите уравнение:

1. $\sqrt{x^2-x-2}+\sqrt{1-x^2}=3x+3$;
2. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[4]{x+74}=12-x$;
3. $\sqrt{x^2-4x+1}=\sqrt{1-x^2}$;
4. $(x^2-4x+6)\sqrt{2-x}=0$;
5. $\sqrt{x-13}=\sqrt{x+8}-3$;
6. $\sqrt{1-2x}=x-5$;
7. $\sqrt{8-x}=2-x$;
8. $\sqrt[3]{x^2-3x+66}+4\sqrt[6]{x^2-3x+66}=12$;
9. $\sqrt{5-3x-x^2}-\sqrt{5+x^2+3x}=2$;
10. $\sqrt{3x-x^2+2}=4-x$;
11. $2\sqrt{x-1}+2=\sqrt{3x+1}$;
12. $\sqrt{3+\sqrt{x-1}}=1$;
13. $\sqrt{4x^2-\sqrt{x-1}}=4-2x$;
14. $\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-5}=3$.

II. Самостоятельная работа: «*Решение иррациональных уравнений*»

Вариант I

Решите уравнение:

1. $\sqrt{2x}+\sqrt{x-3}=-1$;
5. $\sqrt{x+17}-\sqrt{x+1}=2$;
2. $\sqrt{2-x}=\sqrt{2x^2-5}$;
6. $\sqrt{5+\sqrt{x-1}}=3$;
3. $\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{x+4}=\sqrt{6}$;
7. $\sqrt{2-x^2-2x}-\sqrt{x^2+2x-1}=1$.

4. $\left(x^2 - x - 20\right) \cdot \sqrt{x-2} = 0$;

Вариант II

Решите уравнение:

1. $\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x} = 0$;
2. $\sqrt{4+x} \cdot \sqrt{5-x} = 2\sqrt{2}$;
3. $\sqrt{6-3x^2+x} = \sqrt{5-x}$;
4. $\sqrt{7-\sqrt{x+1}} = 2$;
5. $\sqrt{x+13} - \sqrt{x+1} = 2$;
6. $\left(x^2 - 2x + 1\right) \cdot \sqrt{2x-1} = 0$;
7. $\sqrt{x^2+3x-1} + \sqrt{12x^2+36x+1} = 6$.

III. Обобщающий урок: «Иррациональные уравнения и способы их решения»

Обучающая цель: продолжить формировать умения решать иррациональные уравнения различных видов, применяя все изученные способы их решения, за счет обобщения и систематизации теоретических знаний и практических умений по данной теме.

Задачи урока:

1. Рассмотреть обобщающую таблицу: «*Виды иррациональных уравнений и способы их решения*» с целью повторить теоретический материал данной темы.
2. Продолжить учить определять вид иррационального уравнения и способы его решения.

Этапы урока:

I. ***Повторение теоретического материала (7-10 мин)***

Для любых $n \in N$ и любых $a \in R$

Вид уравнения	**Условия**	**Решение**
1. $\sqrt[2n]{f(x)} = a$	$f(x) \geq 0$, Д.У.: $a \geq 0$	$f(x) = a^{2n}$
2. $\sqrt[2n+1]{f(x)} = a$		$f(x) = a^{2n+1}$
3. $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$	$f(x) \geq 0$, Д.У.: $g(x) \geq 0$	$f(x) = g^{2n}(x)$
4. $\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x)$		$f(x) = g^{2n+1}(x)$

5. $\sqrt[2n]{f(x)}=\sqrt[2n]{g(x)}$	$f(x)\ge 0$ **<u>или</u>** $g(x)\ge 0$	$\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)\ge 0 \end{cases}$ **<u>или</u>** $\begin{cases} f(x)=g(x) \\ g(x)\ge 0 \end{cases}$
6. $\sqrt[2n+1]{f(x)}=\sqrt[2n+1]{g(x)}$		$f(x)=g(x)$
7. $\sqrt[2n]{f(x)}\cdot g(x)=0$	$f(x)\ge 0$	$f(x)=0$, $g(x)=0$
8. $\sqrt[2n+1]{f(x)}\cdot g(x)=0$		$f(x)=0$, $g(x)=0$
9. $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=a$	$f(x)\ge 0$, $g(x)\ge 0$, Д.У.: $a\ge 0$	$\sqrt{f(x)}=a-\sqrt{g(x)}$; $f(x)=\left(a-\sqrt{g(x)}\right)^2$
10. $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}=a$	$f(x)\ge 0$, $g(x)\ge 0$	$\sqrt{f(x)}=a+\sqrt{g(x)}$; $f(x)=\left(a+\sqrt{g(x)}\right)^2$
11. $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=h(x)$	$f(x)\ge 0$, $g(x)\ge 0$, Д.У.: $h(x)\ge 0$	$\sqrt{f(x)}=h(x)-\sqrt{g(x)}$; $f(x)=\left(h(x)-\sqrt{g(x)}\right)^2$
12. $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}=h(x)$	$f(x)\ge 0$, $g(x)\ge 0$	$\sqrt{f(x)}=h(x)+\sqrt{g(x)}$; $f(x)=\left(h(x)+\sqrt{g(x)}\right)^2$
13. $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}$	$f(x)\ge 0$, $g(x)\ge 0$, $h(x)\ge 0$	$\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\right)^2=h(x)$
14. $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}$	$f(x)\ge 0$, $g(x)\ge 0$, $h(x)\ge 0$	$f(x)=\left(\sqrt{h(x)}+\sqrt{g(x)}\right)^2$
15. $\sqrt[2n]{f(x)}\cdot\sqrt[2n]{g(x)}=a$	$f(x)\ge 0$, $g(x)\ge 0$, Д.У.: $a\ge 0$	$f(x)\cdot g(x)=a^{2n}$
16. $\sqrt[2n+1]{f(x)}\cdot\sqrt[2n+1]{g(x)}=a$		$f(x)\cdot g(x)=a^{2n+1}$
17. $\dfrac{\sqrt[2n]{f(x)}}{\sqrt[2n]{g(x)}}=a$	$f(x)\ge 0$, $g(x)>0$, Д.У.: $a\ge 0$	$\dfrac{f(x)}{g(x)}=a^{2n}$
18. $\dfrac{\sqrt[2n+1]{f(x)}}{\sqrt[2n+1]{g(x)}}=a$	$g(x)\ne 0$	$\dfrac{f(x)}{g(x)}=a^{2n+1}$

<u>Основные способы решения иррациональных уравнений:</u>

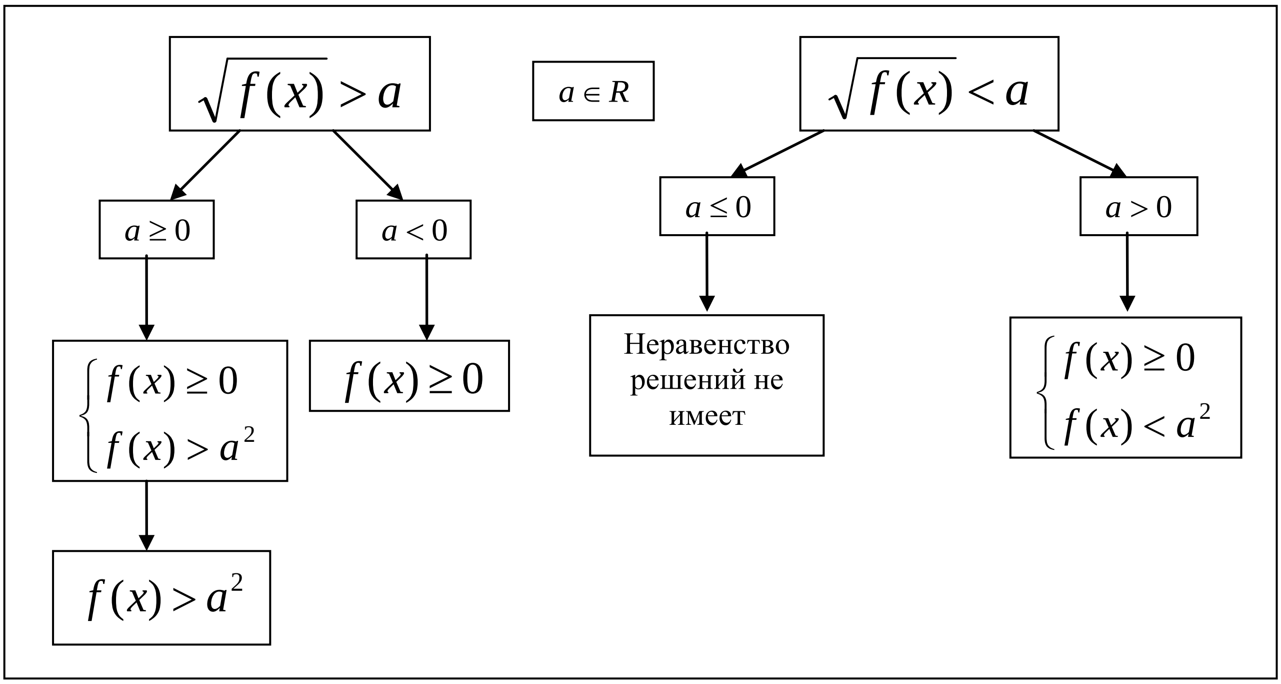
1. По определению арифметического корня натуральной степени;
2. Использование свойств монотонности функций;
3. Введение вспомогательной переменной с целью понижения степени иррационального уравнения;
4. Введение вспомогательной переменной с целью исключения иррациональности;
5. Возведение в квадрат;
6. Графический способ.

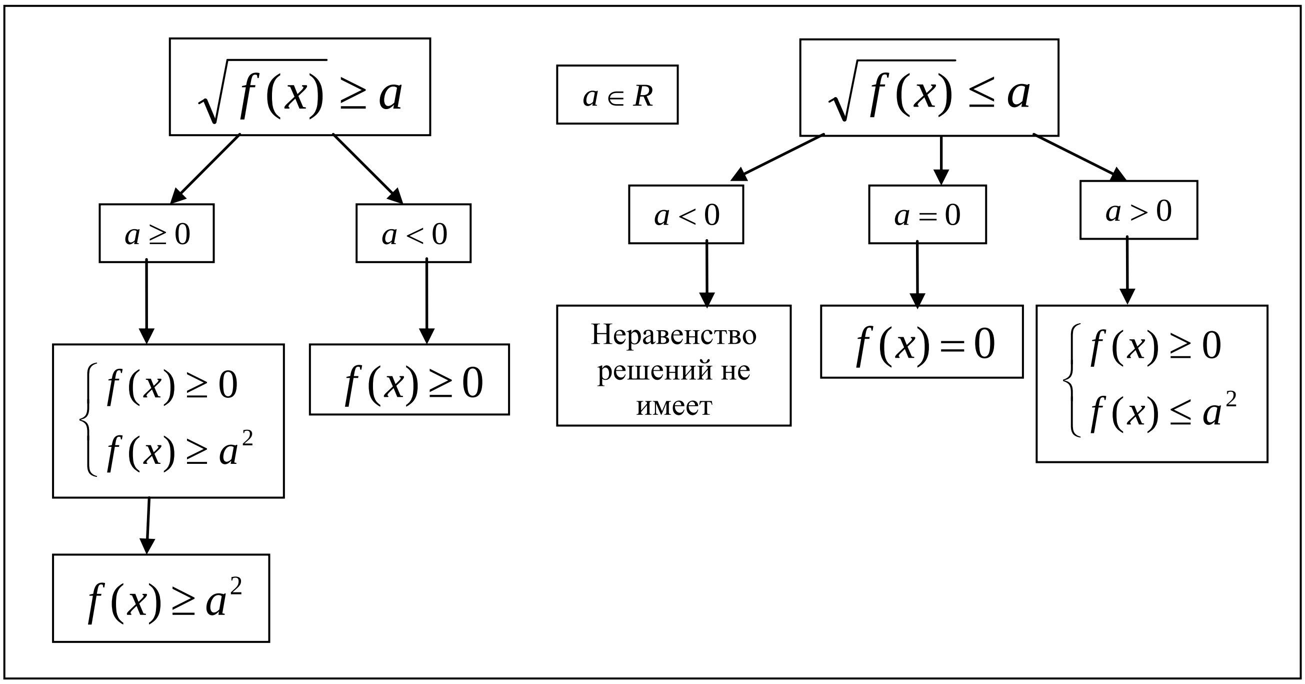
II. ***Решение уравнений***

Способ	№	Решение уравнений	Ответ
	1.	$\sqrt{x^2-x-2}+\sqrt{1-x^2}=3x+3$	
	2.	$\sqrt{8-x}=2-x$	
	3.	$\sqrt[8]{x+1}-\sqrt[4]{x+1}+2=0$	
	4.	$\sqrt{x^2-2x-5}=\sqrt{3x-5}$	
	5.	$\sqrt{x-1}+\sqrt{12x+1}=6$	
	6.	$\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+3x+4}=2-x^2-3x$	
	7.	$5+4x-x^2=\sqrt[4]{x-5}$	
	8.	$\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x+4}+\sqrt{7x+9}=\sqrt{36-5x}$	
	9.	$x^2-2\sqrt{x^2-2x+2}=2x+1$	
	10.	$\sqrt{1-2x}=x-5$	
	11.	$\left(x^2+x-12\right)\cdot\sqrt{x^2-16}=0$	
	12.	$\sqrt{x-13}=\sqrt{x+8}-3$	
	13.	$\sqrt{8x^2+40x}+\sqrt{x^2+5x+9}=3\sqrt{x^2+5x+1}$	
	14.	$\sqrt{4-x}=x^4+3$	
	15.	$\left(x^2-2x-5\right)\cdot\sqrt{1-x}=0$	
	16.	$\sqrt{x^2-4x+1}=\sqrt{1-x^2}$	
	17.	$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[4]{x+74}=12-x$	

Иррациональные неравенства и способы их решения

Решение простейших иррациональных неравенств





<u>Например</u>:

1) Решите неравенство: $\sqrt{-2x+1} > 11$.

Решение: $-2x+1 > 121$;

$-2x > 120$;

$x < -60$.

Ответ: $x < -60$.

2) Решите неравенство: $\sqrt{10+3x-x^2} \ge -2$.

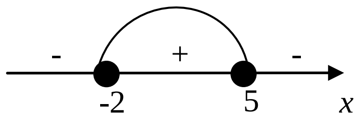
Решение: $10+3x-x^2 \ge 0$;

решим квадратное уравнение $10+3x-x^2=0$;

$x^2-3x-10=0$;

по теореме, обратной теореме Виета:

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2=3 \\ x_1 \cdot x_2=-10 \end{array}\right| \begin{array}{l} x_1=-2 \\ x_2=5. \end{array}$$



$[-2;5]$

Ответ: $[-2;5]$.

3) Решите неравенство: $\sqrt{5-x} < 4$.

Решение: $\begin{cases} 5-x \ge 0, \\ 5-x < 16; \end{cases}$ $\begin{cases} x \le 5, \\ x > -11; \end{cases}$ $-11 < x \le 5.$

Ответ: $-11 < x \le 5.$

4) Решите неравенство: $\sqrt{3x-4} \le -5$.

Решение: т.к. арифметическим корнем четной степени является неотрицательное число, то данное неравенство решений не имеет.

Ответ: неравенство решений не имеет.

5) Решите неравенство: $\sqrt{2x^2+5x-3} \le 0$.

Решение: $\sqrt{2x^2+5x-3}=0$;

$2x^2+5x-3=0$;

$D=25+24=49$;

$x_{1,2}=\dfrac{-5 \pm 7}{4}$;

$x_1=\dfrac{1}{2}$; $x_1=-3$.

Ответ: $x_1=\dfrac{1}{2}$; $x_1=-3$.

Решение иррациональных неравенств

$$\sqrt{f(x)} < g(x); \quad \sqrt{f(x)} > g(x)$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x)$$

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) > 0 \\ \sqrt{f(x)} < g(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < \left(g(x)\right)^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x)$$

$$\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geqslant 0 \\ \sqrt{f(x)} > g(x) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) \geqslant 0 \\ \sqrt{f(x)} > g(x) \end{cases}$$

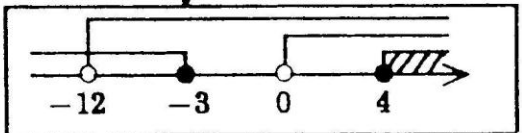
$$\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) > \left(g(x)\right)^2 \end{cases}$$

Пример 1

$$\sqrt{x^2 - x - 12} < x$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 12 \geqslant 0 \\ x > 0 \\ x^2 - x - 12 < x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty;\ -3] \cup [4;\ \infty) \\ x > 0 \\ x > -12 \end{cases}$$



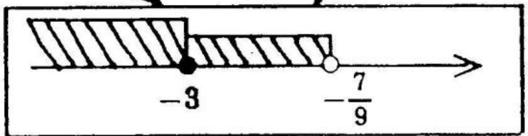
Ответ: $[4;\ \infty)$

Пример 2

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x + 3$$

$$\begin{cases} x + 3 < 0 \\ x^2 - 3x + 2 \geqslant 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 3 \geqslant 0 \\ x^2 - 3x + 2 > (x+3)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -3 \\ x \in (-\infty;\ 1] \cup [2;\ \infty) \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geqslant -3 \\ x < -\dfrac{7}{9} \end{cases}$$



Ответ: $\left(-\infty;\ -\dfrac{7}{9}\right)$

Решение неравенств:

1) Задания для классной работы:

1. №166-№169(нечетн.) [1, с.66];
2. № 172-173(нечётн.) [1, с.67];
3. $\sqrt{x+2} < x$;
4. $\sqrt{5x+6} \le -x$;
5. $\sqrt{3x+4} > x$;
6. $\sqrt{x^2+3x+2} \ge 3-x$;
7. $\sqrt{(x+2)(x-5)} \le 8-x$;
8. $\sqrt{\frac{9}{x^2}-3} > 1+\frac{3}{x}$.

2) Задания для домашней работы:

1. №166-№169(четн.) [1, с.66];
2. № 172-173(чётн.) [1, с.67];
3. $\sqrt{6x+7} > -x$;
4. $\sqrt{2-x} < -x$;
5. $\sqrt{6-5x} \le x$;
6. $\sqrt{4-x^2} + x + 1 > 0$;
7. $\sqrt{x^2-5x+6} \le x+4$.

Контрольная работа: «*Иррациональные уравнения и неравенства*»

Вариант I

1. Решите уравнения:

а) $\sqrt[3]{1-x} = 3$;

б) $\sqrt[4]{4x-3} = \sqrt[4]{x^2-15}$;

в) $\sqrt{8-4x} = x+1$;

г) $(x^2-6x+5)\cdot\sqrt{x^2-7x} = 0$;

д) $\sqrt{2x+5} - \sqrt{x+6} = 1$;

е) $\sqrt{2x^2+5x-2} + \sqrt{2x^2+5x+6} = 4$;

ж) $\sqrt{4-x}\cdot\sqrt{x+5} = 2\sqrt{2}$.

2. Решите неравенства:

а) $\sqrt{x+5} < 2$;

б) $\sqrt[4]{3x^2+2x-5} \le 0$;

в) $\sqrt{6-5x} > -5$;

г) $\sqrt{4x-1} < -1$.

Вариант II

1. Решите уравнения:

а) $\sqrt{x-2} = 4$;

б) $\sqrt[3]{x^2-2x+5} = \sqrt[3]{15-x}$;

в) $\sqrt{x+10} = x-2$;

г) $\sqrt{5x-3x^2} + \sqrt{-3x^2+5x+1} + \sqrt{5x-3x^2+4} = 3$;

д) $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+8} = 1$;

е) $\sqrt{3+x}\cdot\sqrt{x-4} = 2\sqrt{2}$;

ж) $(x^2+3x+2)\cdot\sqrt{2x^2+8x} = 0$.

2. Решите неравенства:

а) $\sqrt{2-x} < 3$;

в) $\sqrt[10]{5x^2-3x-2} \le 0$;

б) $\sqrt{2x+1} > -3$; г) $\sqrt{3x-2} < -2$.

Литература

1. «Алгебра и начала анализа 10-11» Ш.А. Алимов и др. – 11-е изд. – М.: Просвещение, 2003. – 384 с.
2. «Дидактические материалы по алгебре и началам анализа для 10 класса общеобразовательных учреждений» М.И. Шабунин и др. – М.: Просвещение, 2006. – 189 с.
3. «Иррациональные уравнения и неравенства» А.Х. Шахмейстер – 2 изд. – СПб.: ЧеРо-на-Неве, 2004. – 192 с.